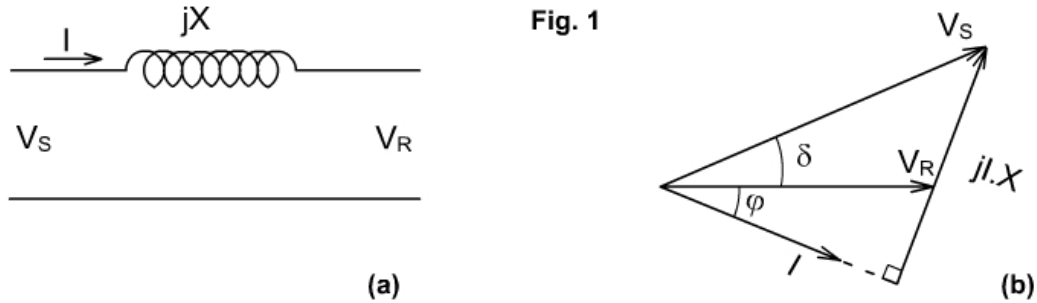


## FLUJO DE POTENCIA EN UNA LÍNEA CORTA

Supongamos una línea corta de resistencia y capacidad despreciable como la de la Fig. 1 (a):



Para determinar la potencia en cada extremo de la línea partimos de la potencia compleja:  $S = P + jQ = V \cdot I^*$ . En el extremo transmisor tenemos:

$S_S = P_S + jQ_S = V_S \cdot I^*$ , el valor de  $I$  lo calculamos como:  $I = \frac{1}{jX}(V_S - V_R)$ , por lo que  $I^* = \frac{1}{-jX}(V_S^* - V_R^*)$ , sustituimos  $I^*$  y obtenemos:  $S_S = \frac{V_S}{-jX}(V_S^* - V_R^*)$ , en el diagrama fasorial que corresponde a la línea Fig. 1 (b)  $V_R = |V_R| \angle 0^\circ$ , o sea  $V_R^* = V_R$  y  $V_S = |V_S| \angle -\delta$ , por lo tanto:

$$S_S = \frac{|V_S|^2 - |V_R| \cdot |V_S| \cdot e^{j\delta}}{-jX} = \underbrace{\frac{|V_R| \cdot |V_S|}{X} \sin \delta}_{P_S} + j \underbrace{\frac{1}{X} (|V_S|^2 - |V_R| \cdot |V_S| \cdot \cos \delta)}_{Q_S}, \text{ finalmente}$$

podemos escribir:

$$P_S = \frac{|V_R| \cdot |V_S|}{X} \sin \delta \text{ y } Q_S = \frac{1}{X} (|V_S|^2 - |V_R| \cdot |V_S| \cdot \cos \delta)$$

De igual manera en el extremo receptor:  $S_R = P_R + jQ_R = V_R \cdot I^*$  y procediendo como en el caso anterior:

$$P_R = \frac{|V_R| \cdot |V_S|}{X} \sin \delta \text{ y } Q_R = \frac{1}{X} (|V_R| \cdot |V_S| \cdot \cos \delta - |V_R|^2)$$

De este ejemplo sencillo se pueden derivar varias conclusiones:

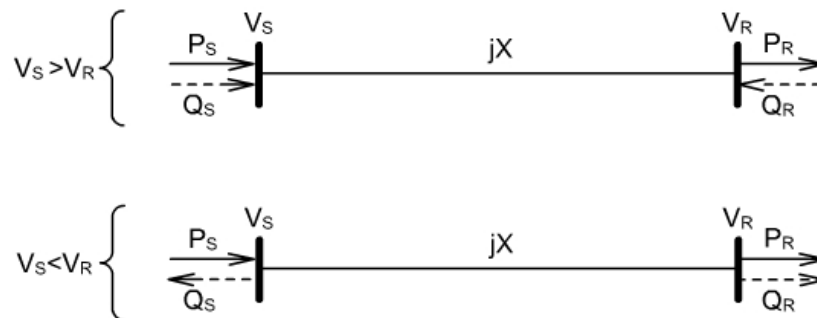
- La transferencia de potencia activa depende solo del ángulo  $\delta$ , el que se conoce como ángulo de potencia.
- La potencia transmitida varía aproximadamente con el cuadrado del nivel de voltaje.
- La potencia máxima transmitida es cuando  $\delta = 90^\circ$

$$P_{R(\text{máx})} = P_{S(\text{máx})} = \frac{|V_R| \cdot |V_S|}{X}$$

- La potencia reactiva fluirá en la dirección del voltaje mas bajo. En la práctica, el sistema opera con  $\delta \approx 0$ , por lo tanto  $\cos \delta \approx 1$ .

$$\text{si: } \delta \approx 0 \text{ y } |V_S| > |V_R| \begin{cases} Q_S \approx \frac{1}{X} (|V_S|^2 - |V_R| \cdot |V_S|) \Rightarrow Q_S > 0 \\ Q_R \approx \frac{1}{X} (|V_R| \cdot |V_S| - |V_R|^2) \Rightarrow Q_R > 0 \end{cases}$$

$$\text{si: } \delta \approx 0 \text{ y } |V_S| < |V_R| \begin{cases} Q_S \approx \frac{1}{X} (|V_S|^2 - |V_R| \cdot |V_S|) \Rightarrow Q_S < 0 \\ Q_R \approx \frac{1}{X} (|V_R| \cdot |V_S| - |V_R|^2) \Rightarrow Q_R < 0 \end{cases}$$



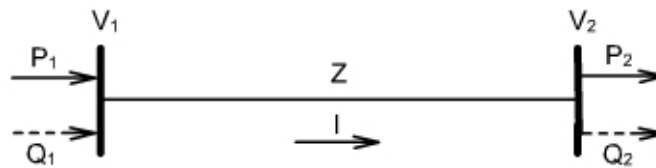
- Si el sistema opera con  $\delta \approx 0$ , el flujo promedio de potencia reactiva está dado por:  $Q_{\text{prom}} = \frac{1}{2}(Q_S + Q_R) = \frac{1}{2X}(|V_S|^2 - |V_R|^2)$ , esta expresión muestra una fuerte dependencia del flujo de potencia reactiva con la diferencia de voltaje.

Si la línea del ejemplo tuviera resistencia serie, entonces aparecen las pérdidas en la línea,  $P_{\text{línea}} = |I|^2 \cdot R$ , sabemos que:  $I^* = \frac{P + jQ}{V}$ , o sea  $I = \frac{P - jQ}{V^*}$ , entonces:

$$I \cdot I^* = |I|^2 = \frac{P^2 + Q^2}{|V|^2} \quad P_{\text{línea}} = \frac{P^2 + Q^2}{|V|^2} \cdot R$$

En esta última expresión vemos que tanto la potencia activa como la reactiva contribuyen a las pérdidas, por eso es importante reducir el flujo de potencia reactiva en las líneas.

## ECUACIONES DEL FLUJO DE POTENCIA



Se puede obtener una expresión analítica para el flujo de potencia en un caso ideal generalmente utilizando un procedimiento iterativo.

La figura muestra un sistema de dos barras, las ecuaciones que gobiernan el sistema son:

$$\begin{cases} S_2 = V_2 \cdot I^* \\ V_1 = V_2 + Z_L \cdot I \end{cases} \quad \text{Resolviendo } V_2 \text{ y eliminando } I \text{ de estas ecuaciones, se obtiene:}$$

$$V_2 = V_1 - Z_L \cdot I = V_1 - Z_L \cdot \frac{S_2^*}{V_2^*} \quad [1]$$

Se resuelve [1] iterativamente, asumiendo un valor para  $V_2$  que llamamos  $V_2^{(0)}$ .

Se sustituye en el miembro de la derecha de [1] y se resuelve, calculando el nuevo valor de  $V_2$ , se obtiene en esta primera iteración,  $V_2^{(1)}$

Se sustituye entonces  $(V_2^{(1)})^*$  en el miembro de la derecha de [1] y obtiene un nuevo valor  $V_2^{(2)}$

Este procedimiento se repite hasta que converja y se alcance la precisión.

El error absoluto cometido es  $e_{absk} = |V_2^k - V_2^{k-1}| < \varepsilon$ , en donde  $\varepsilon$  es un valor de prefijado, de acuerdo a la precisión con que se quiera obtener el resultado

El proceso iterativo usa la ecuación general, o algoritmo:  $V_2^k = V_1 - Z_L \cdot \frac{S_2^*}{(V_2^{(k-1)})^*}$

## FLUJO DE CARGA EN UN SISTEMA DE POTENCIA

En el ejemplo de la línea corta, pudimos obtener una expresión analítica para determinar el flujo de carga, en el caso de un sistema de potencia real las soluciones no son tan exactas debido a las fluctuaciones de carga en las barras y a que la tensión en el extremo receptor puede no ser conocida, por lo tanto es necesario apelar a métodos numéricos para calcular los valores desconocidos, generalmente se utilizan procedimientos iterativos.

A continuación se presentan las generalidades de los dos métodos de cálculo iterativos más utilizados en el estudio de los flujos de carga.

## METODO DE GAUSS-SEIDEL

El método de Gauss-Seidel, es un método iterativo y por lo mismo, resulta ser un método bastante eficiente. Comenzamos con nuestro sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

De la ecuación 1 despejemos  $x_1$ , de la ecuación 2 despejemos  $x_2$ , ..., de la ecuación  $n$  despejemos  $x_n$ . Esto nos da el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1 - \dots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{b_n - a_{n1}x_1 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{aligned}$$

Este último conjunto de ecuaciones son las que forman las fórmulas iterativas. Para comenzar el proceso iterativo, le damos el valor de cero a las variables  $x_2, \dots, x_n$ ; esto nos dará un primer valor para  $x_1$ . Más precisamente, tenemos que:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Enseguida, sustituimos este valor de  $x_1$  en la ecuación 2, y las variables  $x_3, \dots, x_n$  siguen teniendo el valor de cero. Esto nos da el siguiente valor para  $x_2$ :

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)}{a_{22}}$$

Estos últimos valores de  $x_1$  y  $x_2$ , los sustituimos en la ecuación 3, mientras que  $x_4, \dots, x_n$  siguen teniendo el valor de cero; y así sucesivamente hasta llegar a la última ecuación. Todo este paso, nos arrojará una lista de primeros valores para nuestras incógnitas, la cual conforma nuestro primer paso en el proceso iterativo. Digamos que tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 \\ x_2 &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ x_n &= \alpha_n \end{aligned}$$

Volvemos a repetir el proceso, pero ahora sustituyendo estos últimos datos en vez de ceros como al inicio, obtendremos una segunda lista de valores para cada una de las incógnitas. Ahora tenemos:

$$\begin{aligned}x_1 &= \beta_1 \\x_2 &= \beta_2 \\&\vdots \\x_n &= \beta_n\end{aligned}$$

En este momento, podemos calcular los errores aproximados relativos, respecto a cada una de las incógnitas. Así, tenemos la lista de errores como sigue:

$$\begin{aligned}|\varepsilon_{a1}| &= \left| \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\beta_1} \cdot 100\% \right| \\|\varepsilon_{a2}| &= \left| \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\beta_2} \cdot 100\% \right| \\&\vdots \\|\varepsilon_{an}| &= \left| \frac{\beta_n - \alpha_n}{\beta_n} \cdot 100\% \right|\end{aligned}$$

El proceso se vuelve a repetir hasta que:  $|\varepsilon_{ai}| < \varepsilon_{\kappa}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  donde  $\varepsilon_{\kappa}$  es una cota suficiente prefijada.

**Ejemplo 1** Usar el método de Gauss-Seidel para aproximar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x_1 - 0,2x_2 - 0,5x_3 = 8 \\ 0,1x_1 + 7x_2 + 0,4x_3 = -19,5 \\ 0,4x_1 - 0,1x_2 + 10x_3 = 72,4 \end{cases} \quad \text{hasta que } |\varepsilon_a| < 1\% .$$

**Solución** Primero despejamos las incógnitas  $x_1$ ,  $x_2$ , y  $x_3$  de las ecuaciones 1, 2 y 3 respectivamente. Tenemos:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8 + 0,2x_2 + 0,5x_3}{3} \\ x_2 = \frac{-19,5 - 0,1x_1 - 0,4x_3}{7} \\ x_3 = \frac{72,4 - 0,4x_1 + 0,1x_2}{10} \end{cases}$$

Estas últimas, son nuestro juego de fórmulas iterativas.

Comenzamos el proceso iterativo, sustituyendo los valores de  $x_2 = x_3 = 0$  en la primera ecuación, para calcular el primer valor de  $x_1$ :  $x_1 = 2,66667$

Ahora, sustituimos  $x_1 = 2,66667$  y  $x_3 = 0$  en la segunda ecuación, para obtener  $x_2$ :  $x_2 = -2,82381$

Ahora sustituimos  $x_1 = 2,66667$  y  $x_2 = -2,82381$  en la tercera ecuación, para obtener  $x_3$ :  $x_3 = 7,1051$

Así, tenemos la primera aproximación a la solución del sistema: 
$$\begin{cases} x_1 = 2,66667 \\ x_2 = -2,82381 \\ x_3 = 7,1051 \end{cases}$$

Puesto que todavía no podemos calcular ningún error aproximado, repetimos el proceso pero ahora con los últimos datos obtenidos para las incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8 + 0,2 \cdot (-2,82381) + 0,5 \cdot (7,1051)}{3} = 3,6626 \\ x_2 = \frac{-19,5 - 0,1 \cdot (3,6626) - 0,4 \cdot (7,1051)}{7} = -3,24404 \\ x_3 = \frac{72,4 - 0,4 \cdot (3,6626) + 0,1 \cdot (-3,24404)}{10} = 7,06106 \end{cases}$$

Así, tenemos la segunda lista de valores de aproximación a la solución del sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 3,6626 \\ x_2 = -3,24404 \\ x_3 = 7,06106 \end{cases}$$

Ahora si podemos calcular los errores absolutos para cada una de las incógnitas. Tenemos:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{a1}| &= \left| \frac{3,6626 - 2,66667}{3,6626} \cdot 100\% \right| = 27\% \\ |\varepsilon_{a2}| &= \left| \frac{-3,24404 + 2,82381}{-3,24404} \cdot 100\% \right| = 12,9\% \\ |\varepsilon_{a3}| &= \left| \frac{7,06106 - 7,1051}{7,06106} \cdot 100\% \right| = 0,6\% \end{aligned}$$

Puesto que no se ha logrado el objetivo, debemos repetir el mismo proceso con los últimos valores obtenidos de cada una de las incógnitas. Nótese que aunque el

error aproximado  $|\varepsilon_{a3}|$  ya cumple con ser menor al 1%, esto se debe cumplir para los tres errores aproximados

Por lo tanto repetimos el mismo proceso:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8 + 0,2 \cdot (-3,24404) + 0,5 \cdot (7,06106)}{3} = 3,62724 \\ x_2 = \frac{-19,5 - 0,1 \cdot (3,62724) - 0,4 \cdot (7,06106)}{7} = -3,24102 \\ x_3 = \frac{72,4 - 0,4 \cdot (3,62724) + 0,1 \cdot (-3,24102)}{10} = 7,06250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3,62724 \\ x_2 = -3,24102 \\ x_3 = 7,06250 \end{cases}$$

Y en este caso tenemos los siguientes errores aproximados:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{a1}| &= 0,09\% \\ |\varepsilon_{a2}| &= 0,07\% \\ |\varepsilon_{a3}| &= 0,001\% \end{aligned}$$

Vemos que ahora si se ha cumplido el objetivo para cada uno de los errores aproximados.

Por lo tanto, concluimos que la solución aproximada es:

$$\begin{cases} x_1 = 3,62724 \\ x_2 = -3,24102 \\ x_3 = 7,06250 \end{cases}$$

**Observación.** Es lógico preguntarse si siempre el método de Gauss-Seidel converge a la solución del sistema de ecuaciones y también es lógico esperar que la respuesta sea NO.

Un resultado de Análisis Numérico nos da una condición suficiente para la convergencia del método.

**Teorema.** El método de Gauss-Seidel converge a la solución del sistema si se cumple la condición de que la matriz de coeficientes del sistema sea una matriz diagonalmente dominante, es decir, si se cumple lo siguiente:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n$$

La condición de ser una matriz diagonalmente dominante simplemente significa que los elementos de la diagonal son mayores (en valor absoluto) que la suma de los valores absolutos de los demás elementos de la misma fila. Nótese que en el ejemplo anterior, la matriz si es diagonalmente dominante y por lo tanto, el método de Gauss-Seidel si converge a la solución del sistema.

Sin embargo, la condición de la matriz diagonalmente dominante, solamente es una condición suficiente pero no necesaria, es decir, existen sistemas de ecuaciones que no cumplen con la condición y que si convergen a la solución y también existen sistemas de ecuaciones que si cumplen con la condición y que no convergen a la solución.

Finalmente, obsérvese que aunque un sistema no cumpla con la condición de ser diagonalmente dominante, es posible a veces, lograr que si se cumpla con esta condición mediante un intercambio de filas, como veremos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2** Usar el método de Gauss-Seidel para aproximar la solución del sistema:

$$\begin{cases} -5x_1 + 1,4x_2 - 2,7x_3 = 94,2 \\ 0,7x_1 - 2,5x_2 + 15x_3 = -6 \\ 3,3x_1 - 11x_2 + 4,4x_3 = -27,5 \end{cases} \quad \text{hasta que } |\varepsilon_a| < 1\%.$$

**Solución** En este caso, vemos que la matriz de coeficientes del sistema no es diagonalmente dominante.

- 1)  $|-5| > |1,4| + |-2,7| \Rightarrow 5 > 4,1$  (verifica)
- 2)  $|-2,5| < |0,7| + |15| \Rightarrow 2,5 < 15,7$  (NO verifica)
- 3)  $|4,4| < |-11| + |3,3| \Rightarrow 4,4 < 7,7$  (NO verifica)

Pero también vemos que si intercambiamos las filas 2 y 3 entonces si es diagonalmente dominante:

$$\begin{cases} -5x_1 + 1,4x_2 - 2,7x_3 = 94,2 \\ 3,3x_1 - 11x_2 + 4,4x_3 = -27,5 \\ 0,7x_1 - 2,5x_2 + 15x_3 = -6 \end{cases}$$

- 1)  $|-5| > |1,4| + |-2,7| \Rightarrow 5 > 4,1$  (verifica)
- 2)  $|-11| > |3,3| + |4,4| \Rightarrow 11 > 7,7$  (verifica)
- 3)  $|15| > |0,7| + |-2,5| \Rightarrow 15 > 3,2$  (verifica)

Procedemos entonces, a despejar  $x_1$ ,  $x_2$ , y  $x_3$  de las ecuaciones 1, 2 y 3 respectivamente. Tenemos:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{94,2 - 1,4x_2 + 2,7x_3}{-5} \\ x_2 = \frac{-27,5 - 3,3x_1 - 4,4x_3}{-11} \\ x_3 = \frac{-6 - 0,7x_1 + 2,5x_2}{15} \end{cases}$$

Comenzamos el proceso iterativo sustituyendo los valores de  $x_2 = x_3 = 0$  en la ecuación 1 para obtener  $x_1$ :  $x_1 = -18,84$

Ahora sustituimos  $x_1 = -18,84$  y  $x_3 = 0$  en la ecuación 2 para obtener  $x_2$ :  $x_2 = -3,152$

Para terminar la primera iteración, sustituimos  $x_1 = -18,84$  y  $x_2 = -3,152$  en la ecuación 3 para obtener  $x_3$ :  $x_3 = -0,04613$

Por lo tanto los valores obtenidos en la primera iteración son:

$$\begin{cases} x_1 = -18,84 \\ x_2 = -3,152 \\ x_3 = -0,04613 \end{cases}$$

Puesto que solo tenemos la primera aproximación de la solución del sistema, debemos seguir avanzando en el proceso iterativo. Sustituyendo  $x_2 = -3,152$  y  $x_3 = -0,04613$  en la ecuación 1, obtenemos  $x_1 = -19,69765$ ; sustituyendo  $x_1 = -19,69765$  y  $x_3 = -0,04613$  en la ecuación 2, obtenemos  $x_2 = -3,42775$ ; sustituyendo  $x_1 = -19,69765$  y  $x_2 = -3,42775$  en la ecuación 3, obtenemos  $x_3 = -0,05207$ .

Por lo tanto, nuestra segunda aproximación es:

$$\begin{cases} x_1 = -19,69765 \\ x_2 = -3,42775 \\ x_3 = -0,05207 \end{cases}$$

Y ahora si podemos calcular los errores aproximados para cada una de las incógnitas. Tenemos:

$$|\varepsilon_{a1}| = \left| \frac{-19,69756 + 18,84}{-19,69756} \cdot 100\% \right| = 4,35\%$$

$$|\varepsilon_{a2}| = \left| \frac{-3,42775 + 3,152}{-3,42775} \cdot 100\% \right| = 8,04\%$$

$$|\varepsilon_{a3}| = \left| \frac{-0,05207 + 0,04613}{-0,05207} \cdot 100\% \right| = 11,4\%$$

Puesto que no se ha cumplido el objetivo, debemos seguir avanzando en el proceso iterativo. Resumimos los resultados como sigue:

$$\text{Tercera iteración: } \begin{cases} x_1 = -19,77165 \Rightarrow |\varepsilon_{a1}| = 0,3\% \\ x_2 = -3,45232 \Rightarrow |\varepsilon_{a2}| = 0,7\% \\ x_3 = -0,05271 \Rightarrow |\varepsilon_{a3}| = 1,2\% \end{cases}$$

$$\text{Cuarta iteración: } \begin{cases} x_1 = -19,77819 \Rightarrow |\varepsilon_{a1}| = 0,03\% \\ x_2 = -3,45454 \Rightarrow |\varepsilon_{a2}| = 0,06\% \\ x_3 = -0,05277 \Rightarrow |\varepsilon_{a3}| = 0,1\% \end{cases}$$

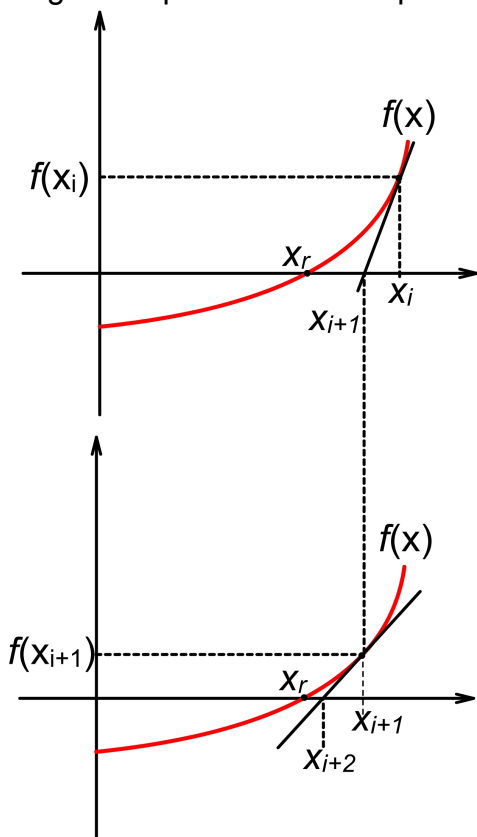
Así, el objetivo se ha logrado hasta la cuarta iteración y tenemos que los valores

$$\text{aproximados de la solución del sistema son: } \begin{cases} x_1 = -19,77819 \\ x_2 = -3,45454 \\ x_3 = -0,05277 \end{cases}$$

## MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Este método iterativo es uno de los más usados y efectivos. A diferencia del método anterior, el de Newton-Raphson no trabaja sobre un intervalo sino que basa su fórmula en un proceso iterativo.

Supongamos que tenemos la aproximación  $x_i$  a la raíz  $x_r$  de  $f(x)$ .



Trazamos la recta tangente a la curva en el punto  $(x_i, f(x_i))$ ; ésta cruza al eje  $x$  en un punto  $x_{i+1}$  que será nuestra siguiente aproximación a la raíz  $x_r$ .

Para calcular el punto  $x_{i+1}$ , calculamos primero la ecuación de la recta tangente. Sabemos que tiene pendiente:  $m = f'(x_i)$

Y por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:  $y - f(x_i) = f'(x_i) \cdot (x - x_i)$

Hacemos  $y = 0$ , entonces:

$$-f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

$$-f(x_i) = x \cdot f'(x_i) - x_i \cdot f'(x_i)$$

$$x = \frac{-f(x_i) + x_i \cdot f'(x_i)}{f'(x_i)}$$

y obtenemos:

$$x = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Que es la fórmula iterativa de Newton-Raphson

Para calcular la siguiente aproximación:  $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$  si:  $f'(x_i) \neq 0$

Nótese que el método de Newton-Raphson no trabaja con intervalos donde nos aseguremos encontrar la raíz, y de hecho no tenemos ninguna garantía de que nos aproximaremos a dicha raíz. Desde luego, existen ejemplos donde este método no converge a la raíz, en cuyo caso se dice que el método **diverge**. Sin embargo, en los casos donde sí converge a la raíz lo hace con una rapidez impresionante, por lo cual es uno de los métodos preferidos por excelencia.

También observe que en el caso de que  $f'(x_i) = 0$ , el método no se puede aplicar. De hecho, vemos geoméricamente que esto significa que la recta tangente es horizontal y por lo tanto no intersecta al eje  $x$  en ningún punto, a menos que coincida con éste, en cuyo caso  $x_i$  mismo es una raíz de  $f(x)$

**Ejemplo 1** Usar el método de Newton-Raphson, para aproximar la raíz de  $f(x) = e^{-x} - \ln x$ , comenzando con  $x_0 = 1$  y hasta que  $|\varepsilon_a| < 1\%$ .

**Solución:**

En este caso, tenemos que:  $f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x}$

De aquí tenemos que: 
$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - \ln(x_i)}{-e^{-x_i} - \frac{1}{x_i}} = x_i + \frac{e^{-x_i} - \ln(x_i)}{e^{-x_i} + \frac{1}{x_i}}$$

Comenzamos con  $x_0 = 1$  y obtenemos:

$$x_1 = x_0 + \frac{e^{-x_0} - \ln(x_0)}{e^{-x_0} + \frac{1}{x_0}} = 1 + \frac{e^{-1} - \ln(1)}{e^{-1} + \frac{1}{1}} = 1,268941421$$

En este caso, el error aproximado es,  $|\varepsilon_a| = \frac{1,268941421 - 1}{1,268941421} \cdot 100\% = 21,19\%$

La segunda iteración se obtiene con  $x_1 = 1,268941421$

$$x_2 = x_1 + \frac{e^{-x_1} - \ln(x_1)}{e^{-x_1} + \frac{1}{x_1}} = 1,268941421 + \frac{e^{-1,268941421} - \ln(1,268941421)}{e^{-1,268941421} + \frac{1}{1,268941421}} = 1,309108403$$

Y el error:  $|\varepsilon_a| = \frac{1,309108403 - 1,268941421}{1,309108403} \cdot 100\% = 3,07\%$

Continuamos el proceso hasta reducir el error aproximado hasta donde se pidió. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

|       | Aprox. a la raíz | Error aprox. |
|-------|------------------|--------------|
| $x_0$ | 1                |              |
| $x_1$ | 1,268941421      | 21,19%       |
| $x_2$ | 1,309108403      | 3,07%        |
| $x_3$ | 1,309799389      | 0,052%       |

De lo cual concluimos que la aproximación obtenida es:  $x_3 = 1,309799389$

**Ejemplo 2** Usar el método de Newton-Raphson para aproximar la raíz de  $f(x) = \arctg x + x - 1$ , comenzando con  $x_0 = 0$  y hasta que  $|\varepsilon_a| < 1\%$ .

**Solución:**

En este caso, tenemos que:  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 1$

La cual sustituimos en la fórmula de Newton-Raphson para obtener:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\arctan(x_i) + x_i - 1}{\frac{1}{1+x_i^2} + 1}$$

Comenzamos sustituyendo  $x_0 = 0$  para obtener:  $x_1 = x_0 - \frac{\arctan(x_0) + x_0 - 1}{\frac{1}{1+x_0^2} + 1} = 0,5$

En este caso tenemos un error aproximado de  $|\varepsilon_a| = \frac{0,5-0}{0,5} \cdot 100\% = 100\%$

Continuamos con el proceso hasta lograr el objetivo. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

|       | Aprox. a la raíz | Error aprox. |
|-------|------------------|--------------|
| $x_0$ | 0                |              |
| $x_1$ | 0,5              | 100%         |
| $x_2$ | 0,5201957728     | 3,88%        |
| $x_3$ | 0,5202689918     | 0,01%        |

De lo cual concluimos que la aproximación obtenida es:  $x_3 = 0,5202689918$

**Ejemplo 3** Usar el método de Newton-Raphson para aproximar raíces cuadradas de números reales positivos.

**Solución:**

Sea  $R > 0$ . Queremos calcular  $x$  tal que  $x = \sqrt{R}$ ; elevando al cuadrado  $x^2 = R$ , o bien:  $x^2 - R = 0$

Esto nos sugiere definir la función  $f(x) = x^2 - R$  de donde  $f'(x) = 2x$ . Al sustituir

estos datos en la fórmula de Newton-Raphson nos da:  $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - R}{2x_i}$

La cual simplificada nos da:  $x_{i+1} = \frac{1}{2} \left[ x_i + \frac{R}{x_i} \right]$

Esta fórmula era conocida por los antiguos griegos (Herón).

Para fijar un ejemplo de su uso, pongamos  $R = 26$  y apliquemos la fórmula obtenida, comenzando con  $x_0 = 5$ . Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

|       | Aprox. A la raíz | Error aprox. |
|-------|------------------|--------------|
| $x_0$ | 5                |              |
| $x_1$ | 5,1              | 1,96%        |
| $x_2$ | 5,099019608      | 0,019%       |
| $x_3$ | 5,099019514      | 0,0000018%   |

Concluimos que  $\sqrt{26} \approx 5,099019514$ , la cual es correcta en todos sus dígitos.

La misma idea puede aplicarse para crear algoritmos que aproximen raíces enésimas de números reales positivos.

Observe que cuando el método de Newton-Raphson converge a la raíz, lo hace de una forma muy rápida y de hecho, observamos que el error aproximado disminuye a pasos agigantados en cada paso del proceso.